

Automatsko rezonovanje – beleške sa predavanja Rezonovanje u logici prvog reda sa jednakošću

Milan Banković (po slajdovima Filipa Marića)

* Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Prolećni semestar 2023/24.

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme
- 3 Rezolucija i paramodulacija
- 4 Dedukcija i jednakost
- 5 Jednakosno rezonovanje
- 6 Kongruentno zatvorenje
- 7 Prezapisivanje

Poseban tretman jednakosti

Kako interpretiramo simbol jednakosti?

Do sada je simbol $=$ bio tretiran kao bilo koji drugi predikatski simbol.

Primer

Za očekivati je da je formula

$$\forall x y z. x = y \wedge y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

valjana, međutim, ona to nije. Po do sada izloženom, ova formula se ni po čemu ne razlikuje od formule

$$\forall x y z. p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(f(x), f(z)),$$

za koju je jasno da nije valjana (npr. netačna je kada se f interpretira identičkom funkcijom, a p nekom netranzitivnom relacijom).

Poseban tretman jednakosti

Poželjno je da jednakost bude jednakost

- Ipak, uloga jednakosti je centralna u matematici tako da je poželjno posmatrati samo one interpretacije u kojima se simbol '=' interpretira upravo relacijom jednakosti.
- Iako se prethodno opisane procedure jednostavno modifikuju tako da u obzir uzmu samo ovakve modele, moguća je i izrada efikasnijih procedura, specijalizovanih za rezonovanje u prisustvu jednakosti.

Normalne interpretacije

Definicija

Ako signatura \mathcal{L} sadrži simbol $=$, za \mathcal{L} -strukturu (model, interpretaciju) kažemo da je *normalna* ako se simbol $=$ interpretira relacijom jednakosti odgovarajućeg domena D (tj. relacijom $\{(x, x) \mid x \in D\}$)

Definicija

Logika prvog reda sa jednakošću je fragment logike prvog reda u kome razmatramo samo signature koje sadrže simbol $=$, pri čemu se ograničavamo samo na normalne interpretacije.

Zadovoljivost, valjanost, ...

Definicija

Formula F je *valjana* u logici prvog reda sa jednakošću ako je tačna u svim normalnim interpretacijama. Formula F je *zadovoljiva* u logici prvog reda sa jednakošću ako ima normalni model.

Definicija

Formula F je *logička posledica* skupa formula Δ u logici prvog reda sa jednakošću (u oznaci $\Delta \models F$ ako je tačna u svim normalnim interpretacijama u kojima su tačne i sve formule iz Δ).

Definicija

Formule F i G su *logički ekvivalentne* (u oznaci $F \equiv G$) ako važi $F \models G$ i $G \models F$, tj. ako se interpretiraju isto u svim normalnim interpretacijama.

Aksiome jednakosti

Aksiome jednakosti

S obzirom da je relacija jednakosti relacija **ekvivalencije**, u svim normalnim interpretacijama naredne formule su tačne.

refleksivnost : $\forall x. x = x$

simetričnost : $\forall x y. x = y \Leftrightarrow y = x$

tranzitivnost : $\forall x y z. x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Takođe, za svaki n -arni funkcijski simbol f odnosno svaki n -arni predikatski simbol p tačne su i formule **kongruentnosti**

$$\forall x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n. x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

$$\forall x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n. x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow p(y_1, \dots, y_n)$$

Navedene formule nazivamo **aksiomama jednakosti**. Oznaka $eqax(\mathcal{L})$ označava aksiome jednakosti jezika \mathcal{L} .

Aksiome jednakosti

Aksiome jednakosti i normalne interpretacije

- Svaka normalna interpretacija zadovoljava aksiome jednakosti.
- Međutim, postoje interpretacije koji nisu normalne, a opet zadovoljavaju aksiome jednakosti.

Primer

Ukoliko se jezik $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, =\}$ interpretira uobičajeno na skupu prirodnih brojeva, a simbol $=$ relacijom $x \equiv y \pmod{2}$, model zadovoljava aksiome jednakosti, a nije normalan.

- Na žalost, nije moguće aksiomatski se ograničiti samo na normalne modele.
- Na sreću, to nam, sa stanovišta rezonovanja, nije ni neophodno.

Veza između normalnih modela i modela aksioma jednakosti

Stav

Formula F jezika \mathcal{L} ima normalan model akko F i $\text{eqax}(\mathcal{L})$ imaju model.

Dokaz

Ako F ima normalan model on je model u kome su i F i $\text{eqax}(\mathcal{L})$ tačne.

Obratno, ako postoji model za F i $\text{eqax}(\mathcal{L})$ može se definisati relacija \sim na domenu D takva da je $x \sim y$ akko $x =_{\mathcal{M}} y$, tj. kada su x i y jednaki po interpretaciji M . Pošto u M važe $\text{eqax}(\mathcal{L})$ relacija \sim je relacija ekvivalencije. Traženi normalni model se može jednostavno izgraditi nad klasama ekvivalencije relacije \sim kao domenom.

Veza između normalnih modela i modela aksioma jednakosti

Stav

- *Formula F je zadovoljiva u nekom normalnom modelu akko je formula $F \wedge eqax(\mathcal{L})$ zadovoljiva (u opštoj logici prvog reda).*
- *Formula F važi u svim normalnim modelima akko je formula $eqax(\mathcal{L}) \Rightarrow F$ valjana (u smislu opšte logike prvog reda).*

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme**
- 3 Rezolucija i paramodulacija
- 4 Dedukcija i jednakost
- 5 Jednakosno rezonovanje
- 6 Kongruentno zatvorenje
- 7 Prezapisivanje

Poluodlučivost i (ne)odlučivost

Teorema

Logika prvog reda sa jednakošću je poluodlučiva: za svaku formulu koja je valjana (tj. tačna u svim normalnim modelima) je moguće utvrditi da je valjana.

Teorema

Logika prvog reda sa jednakošću nije odlučiva.

Kompaktnost

Teorema

Skup formula je zadovoljiv u logici prvog reda sa jednakošću (tj. tačan u nekom normalnom modelu) akko je svaki njegov konačan podskup zadovoljiv (u nekom normalnom modelu).

O konačnim modelima

Šta je moguće reći o kardinalnostima?

- U opštoj logici prvog reda nismo mogli da fiksiramo da skup formula ima samo modele neke fiksirane konačne kardinalnosti
- U logici prvog reda sa jednakošću to možemo. Npr. formula $\exists x_1 x_2 x_3. x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge (\forall y. y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)$ ima samo normalne modele kardinalnosti 3
- Medjutim, ne možemo da se ograničimo samo na konačne modele (proizvoljne kardinalnosti)

Teorema

Ukoliko skup formula Δ ima normalne modele svih mogućih konačnih kardinalnosti, tada ima i normalan model beskonačne kardinalnosti.

Dokaz

Neka je formula $\phi_n = \exists x_1 x_2 \dots x_n. x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n$. Ovu formulu zadovoljavaju svi normalni modeli kardinalnosti veće ili jednake od n . Posmatrajmo skup formula $\Phi = \Delta \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Svaki konačan podskup ovog skupa je zadovoljiv (jer po pretpostavci za skup Δ postoji konačan model bilo koje kardinalnosti). Na osnovu teoreme kompaktnosti, sledi da je i ceo skup Φ zadovoljiv. Medjutim, jasno je da njegov model mora biti beskonačan.

Skolem-Lovenhajmova teorema

A šta je sa beskonačnim kardinalnostima?

- Kada su u pitanju beskonačne kardinalnosti, ni ovde ne možemo ni na koji način fiksirati kardinalnost modela.
- Drugim rečima, važe Skolem-Lovenhajmove teoreme (na dole i na gore).

Teorema

Ukoliko najviše prebrojiv skup formula ima beskonačan normalan model, tada ima i prebrojiv normalan model.

Teorema

Ukoliko najviše prebrojiv skup formula ima prebrojiv normalan model, tada on ima i normalan model bilo koje veće kardinalnosti.

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme
- 3 Rezolucija i paramodulacija**
- 4 Dedukcija i jednakost
- 5 Jednakosno rezonovanje
- 6 Kongruentno zatvorenje
- 7 Prezapisivanje

Rezolucija u jednakosnoj logici

Metod rezolucije i jednakost

- Metod rezolucije je bio jedan metod poluodlučivanja za opštu logiku prvog reda
- Ovaj metod se može koristiti i kao procedura poluodlučivanja za logiku prvog reda sa jednakošću
- Za to je dovoljno klauzalnoj formi formule F čiju zadovoljivost ispitujemo dodati aksiome jednakosti (prethodno konvertovane u klauzalnu formu)

Rezolucija u jednakosnoj logici

Primer

Da bismo dokazali da je formula

$$\forall x y z. x = y \wedge y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

valjana u jednakosnoj logici, možemo je najpre negirati, a zatim njenu negaciju svesti u klauzalni oblik. Dobijamo klauze:

- 1) $a = b$
- 2) $b = c$
- 3) $f(a) \neq f(c)$ (kraći zapis za $\neg(f(a) = f(c))$)

Dodajmo tome i klauze koje predstavljaju aksiome jednakosti (one koje su nam potrebne ovde):

- 4) $x \neq y \vee y \neq z \vee x = z$
- 5) $u \neq v \vee f(u) = f(v)$

Sada iz 1 i 4 pravilom rezolucije dobijamo 6) $b \neq z \vee a = z$, a iz 2 i 6 dobijamo 7) $a = c$. Najzad, iz 7 i 5 dobijamo 8) $f(a) = f(c)$, pa iz 3 i 8 dobijamo praznu klauzu.

Paramodulacija

Kako rezoluciju u prisustvu jednakosti učiniti efikasnom?

- Iako je prethodni primer bio prilično jednostavan, u slučaju složenijih tvrdjenja ovakav način dokazivanja postaje prilično neefikasan
- Najveći problem je utvrditi na koji način instancirati aksiome jednakosti
- Bolja ideja je da probamo da metod rezolucije obogatimo dodatnim pravilom koje će omogućiti jednakosno rezonovanje, bez uvođenja aksioma jednakosti
- Jedno takvo pravilo je pravilo **paramodulacije**

Paramodulacija

Definicija

Pravilo paramodulacije glasi:

$$\frac{C_1 \vee s = t \text{ (ili } t = s) \quad C_2 \vee L[t']}{(C_1 \vee C_2 \vee L[s])\sigma}$$

gde je σ najopštiji unifikator za termine t i t' .

Napomene

- Može se pokazati da pravilo paramodulacije ima svojstvo saglasnosti
- Takodje, koristeći samo paramodulaciju i rezoluciju, iz refleksivnosti je moguće dokazati simetričnost i tranzitivnost jednakosti, kao i kongruentnost
- Otuda je za kompletnost (za pobijanje) u jednakosnoj logici dovoljan metod rezolucije koji pored pravila paramodulacije implicitno podrazumeva i univerzalno kvantifikovanu jediničnu klauzu $x = x$

Paramodulacija

Primer

Posmatrajmo ponovo formulu

$$\forall x y z. x = y \wedge y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

za koju dokazujemo da je valjana u jednakosnoj logici, tako što dokazujemo nezadovoljivost skupa klauza:

- 1) $a = b$
- 2) $b = c$
- 3) $f(a) \neq f(c)$

Paramodulacijom iz 1) i 2) (za $s = a$, $t = b$, $t' = b$) dobijamo 4) $a = c$. Dalje, iz 4) i 3) paramodulacijom (za $s = a$, $t = c$, $t' = c$) dobijamo 5) $f(a) \neq f(a)$. Koristeći implicitnu klauzu refleksivnosti $x = x$, rezolucijom sa 5) dobijamo praznu klauzu.

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme
- 3 Rezolucija i paramodulacija
- 4 Dedukcija i jednakost**
- 5 Jednakosno rezonovanje
- 6 Kongruentno zatvorenje
- 7 Prezapisivanje

Dedukcija i jednakost

Deduktivni sistemi za jednakost

- Svi deduktivni sistemi logike prvog reda (Hilbertov sistem, prirodna dedukcija, ...) se mogu koristiti i u logici sa jednakošću
- Jednakost se tretira tako što koristimo aksiome jednakosti kao pretpostavke
- Alternativno, možemo aksiome jednakosti formulisati i kao dodatna pravila deduktivnog sistema

Pravila dedukcije za jednakost

Refleksivnost

$$\frac{}{u = u} \textit{ refl}$$

Simetričnost

$$\frac{u = v}{v = u} \textit{ sym}$$

Tranzitivnost

$$\frac{u = v \quad v = w}{u = w} \textit{ trans}$$

Kongruencija

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \dots \quad t_n = s_n}{f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n)} \textit{ congF}$$

$$\frac{t_1 = s_1 \quad \dots \quad t_n = s_n}{p(t_1, \dots, t_n) \Rightarrow p(s_1, \dots, s_n)} \textit{ congP}$$

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme
- 3 Rezolucija i paramodulacija
- 4 Dedukcija i jednakost
- 5 Jednakosno rezonovanje**
- 6 Kongruentno zatvorenje
- 7 Prezapisivanje

Jednakosno rezonovanje

Teorija jednakosti sa neinterpretiranim funkcijskim simbolima

- U prethodnom razmatranju smo podrazumevali da signatura pored jednakosti sadrži i druge predikatske simbole
- Možemo se dalje ograničiti samo na signature koje ne sadrže druge predikatske simbole osim jednakosti
 - sa druge strane, signatura može sadržati funkcijske simbole koji se mogu interpretirati na proizvoljan način (tj. pretpostavljamo da važe samo aksiome jednakosti)
- ovakva logička teorija je poznata i kao **teorija jednakosti sa neinterpretiranim funkcijskim simbolima** (engl. **Equality with Uninterpreted Functions (EUF)**)
 - jedini literali u formulama ove teorije su **jednakosti** i **različitosti** nad termovima koji su izgrađeni nad neinterpretiranim funkcijskim simbolima

Jednakosno rezonovanje

Postavka problema

Centralni problem koji ćemo posmatrati je sledeći:

$$\Delta \models s = t$$

gde je Δ skup univerzalno kvantifikovanih jednakosti, a $s = t$ je univerzalno kvantifikovana jednakost.

- Dakle, ispitujemo da li je neka jednakost logička posledica datog skupa jednakosti (podrazumevamo samo normalne interpretacije).
- Univerzalne kvantifikacije su obično implicitne
- Može se pokazati da se možemo ograničiti na slučajeve kada je jednakost $s = t$ bazna, što ne umanjuje opštost

Jednakosno rezonovanje

Stav

Problem $\Delta \models s = t$ u kome su sve promenljive koje se pojavljuju u $s = t$ implicitno univerzalno kvantifikovane ekvivalentan je problemu $\Delta \models s = t$ u kome se sve promenljive koje se pojavljuju u $s = t$ tretiraju kao konstante.

Dokaz

Pretpostavimo da jednakost $s = t$ sadrži promenljive x_1, \dots, x_n koje su implicitno univerzalno kvantifikovane. Problem $\Delta \models s = t$ je ekvivalentan problemu ispitivanja (ne)zadovoljivosti skupa formula $\Delta \cup \{\neg \forall x_1 \dots x_n. s = t\}$. Negacijom univerzalnog kvantifikatora dobijamo egzistencijalni, pa skolemizacijom dobijamo ekvizadovoljiv skup $\Delta \cup \{s \neq t\}$ (gde se promenljive x_1, \dots, x_n nadalje tumače kao konstante). Otuda je gornji problem ekvivalentan problemu ispitivanja logičke posledice $\Delta \models s = t$, pri čemu je $s = t$ sada bazna jednakost.

Sintaksno-deduktivni sistemi za jednakost

Deduktivni sistemi u teoriji jednakosti

- Kako bismo automatizovali rešavanje prethodnog problema, možemo kao i u opštoj logici prvog reda, razmatrati deduktivne sisteme za jednakost
- Ovakvi deduktivni sistemi su jednostavniji od opštih deduktivnih sistema, jer ne moraju sadržati pravila za iskazne veznike, s obzirom na formu problema koji razmatramo
- Jedan takav sistem je **Birkhoffov sistem** koji prikazujemo u nastavku

Sintaksno-deduktivni sistemi za jednakost — Birkhofova pravila

Birkhofova pravila

$$\frac{}{\Delta \vdash t = t} \text{ refl}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t}{\Delta \vdash t = s} \text{ sym}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t \quad \Delta \vdash t = u}{\Delta \vdash s = u} \text{ trans}$$

$$\frac{\Delta \vdash s_1 = t_1 \quad \dots \quad \Delta \vdash s_n = t_n}{\Delta \vdash f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n)} \text{ cong}$$

$$\frac{}{\Delta, s = t \vdash s = t} \text{ ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t}{\Delta \vdash (s = t)[x \rightarrow a]} \text{ inst}$$

Primer

Dokažimo da važi:

$$a = b, c = b \vdash f(a) = f(c)$$

Imamo sledeći dokaz u Birkhofovom sistemu:

$$\frac{\frac{\frac{}{a = b, c = b \vdash a = b} \text{ax}}{a = b, c = b \vdash a = b} \text{ax} \quad \frac{\frac{}{a = b, c = b \vdash c = b} \text{ax}}{a = b, c = b \vdash b = c} \text{sym}}{a = b, c = b \vdash a = c} \text{tran} \quad \frac{a = b, c = b \vdash a = c}{a = b, c = b \vdash f(a) = f(c)} \text{cong}$$

Birkofova teorema

Teorema

$\Delta \models s = t$, tj. jednačina $s = t$ važi u svim normalnim modelima skupa jednačina Δ akko i samo ako $\Delta \vdash s = t$, tj. ako se $s = t$ može izvesti iz Δ primenom Birkofovih pravila.

Zamenski dokazi

Definicija

Neka je dat problem $E \vdash s = t$, gde je $s = t$ bazna jednakost. Pod zamenskim dokazom jednakosti $s = t$ iz E podrazumevamo lanac jednakosti $u_0 = u_1 = \dots = u_n$, gde je $u_0 = s$, $u_n = t$, i važi da je $u_{i+1} = u_i[l_j \rightarrow r_j]$, gde je $l_j = r_j$ (ili $r_j = l_j$) bazna instanca neke jednakosti iz E .

Teorema

$E \vdash s = t$, tj. $s = t$ se može dokazati iz E u Birkhofovom sistemu akko postoji zamenski dokaz za $s = t$ iz E .

Zamenski dokazi

Primer

Dokažimo da važi

$$a = b, c = b \vdash f(a) = f(c)$$

Imamo sledeći zamenski dokaz: $f(a) = f(b) = f(c)$, pri čemu smo najpre a zamenili sa b (na osnovu jednakosti $a = b$), a zatim smo b zamenili sa c (na osnovu jednakosti $c = b$).

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme
- 3 Rezolucija i paramodulacija
- 4 Dedukcija i jednakost
- 5 Jednakosno rezonovanje
- 6 Kongruentno zatvorenje**
- 7 Prezapisivanje

Odlučivanje baznih jednakosti

Bazni fragment teorije EUF

- Prilikom primene Birkofovih pravila problem predstavlja pravilo instancijacije (nije jasno kako odlučiti koju instancijaciju $x \rightarrow t$ upotrebiti).
- Ukoliko su sve jednakosti bazne (nemaju slobodnih promenljivih), onda pravilo instancijacije nije potrebno koristiti, što čini ovaj fragment odlučivim.
- Procedure odlučivanja za bazne jednakosti se obično zasnivaju na kongruentnom zatvorenju.

Kongruentne relacije

Definicija

Relacija \sim je *kongruencija* na skupu D u odnosu na jezik \mathcal{L} ako je relacija ekvivalencije na domenu D saglasna (kongruentna) sa svim funkcijskim simbolima jezika \mathcal{L} , tj. za svako f važi da ako $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$, tada $f(s_1, \dots, s_n) \sim f(t_1, \dots, t_n)$.

Kongruentno zatvorenje relacije je najmanja kongruencija koja sadrži polaznu relaciju.

Teorema o kongruentnom zatvorenju

Teorema

Neka su s_i , t_i , s i t bazni termovi i neka je D skup svih ovih termova i svih njihovih podtermova. Neka je \sim kongruentno zatvorenje relacije $\{(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)\}$. Tada

$$\{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\} \vDash s = t$$

akko

$$\{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\} \vdash s = t$$

akko

$$s \sim t$$

Teorema o kongruentnom zatvorenju

Dokaz

Prva i druga stavka su ekvivalentne na osnovu Birkhofove teoreme. Iz druge stavke sledi treća Iz treće stavke sledi druga

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

Ideja algoritma

- Postupak se zasniva na postepenom proširenju relacije kongruencije počevši od prazne relacije i dodavanjem jedne po jedne jednakosti.
- Kongruencije se predstavljaju klasama ekvivalencije (korišćenjem *union-find* strukture).
- Prilikom spajanja klasa vrši se analiza termova u kojima elementi tih klasa učestvuju i na osnovu kongruentnosti spajaju se odgovarajući termovi. Ukoliko se npr. klase koje sadrže termovi s i t spajaju, a postoje npr. termovi $f(s, g(t))$ i $f(t, g(s))$, potrebno je spojiti i klase kojima oni pripadaju.

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

Oznake koje ćemo koristiti:

- Neka je $E = \{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\}$ skup baznih jednakosti. Neka je T skup termova zatvoren za podtermove koji sadrži sve bazne termove s_i, t_i (i možda još neke druge termove i njihove podtermove).
- Neka $use(t)$ označava skup svih termova skupa T čiji je podterm term t . Ovi skupovi se mogu unapred izračunati.
- Neka $find(t)$ vraća kanonskog predstavnika klase ekvivalencije kojoj pripada term t .
- Neka $union(s, t)$ spaja klasu ekvivalencije terma s i klasu ekvivalencije terma t .
- Neka $cong(s, t)$ označava da je s oblika $f(s_1, \dots, s_n)$ i t oblika $f(t_1, \dots, t_n)$ pri čemu je $find(s_i) = find(t_i)$.

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

Algoritam Nelson-Open

```
function cc(E, T)
begin
  foreach  $t \in T$   $find(t) := t.$ 
  foreach  $s_i = t_i \in E$ 
    if( $find(s_i) \neq find(t_i)$ )
      merge( $s_i, t_i$ )
end

function merge(s, t)
begin
   $T_s = \bigcup \{use(u) \mid find(u) = find(s)\}$ 
   $T_t = \bigcup \{use(u) \mid find(u) = find(t)\}$ 
  union(s, t)
  foreach  $s' \in T_s, t' \in T_t$ 
    if ( $find(s') \neq find(t') \wedge cong(s', t')$ )
      merge( $s', t'$ )
end
```

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja — primer

Primer

Ispitajmo da li važi: $x = y, y = z \vDash f(x) = f(z)$ (gde su x, y, z konstante). Potrebno je odrediti kongruentno zatvorenje za skup jednakosti $E = \{x = y, y = z\}$ nad skupom termova $T = \{x, y, z, f(x), f(z)\}$ (dakle, svi termovi koji se pojavljuju u E , kao i u jednakosti $f(x) = f(z)$ koju dokazujemo).
 use je određen sa

$$\{x \mapsto \{f(x)\}, y \mapsto \{\}, z \mapsto \{f(z)\}, f(x) \mapsto \{\}, f(z) \mapsto \{\}\}$$

Krećemo od jednočlanih klasa $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}\}$, tj. find je određen sa:

$$\{x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$$

Primer

- $merge(x, y) - T_x = \{f(x)\}, T_y = \{\}$. Nakon $union(x, y)$, dobijaju se klase $\{\{x, y\}, \{z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}\}$, tj. $find$ je određen sa $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto z, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$. Petlja je prazna.
- $merge(y, z) - T_y = \{f(x)\}, T_z = \{f(z)\}$. Nakon $union(y, z)$, dobijaju se klase $\{\{x, y, z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}\}$, tj. $find$ je određen sa $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto x, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$. $f(x)$ i $f(z)$ su kongruentni pa se poziva:
 - $merge(f(x), f(z)) - T_{f(x)} = \{\}, T_{f(z)} = \{\}$. Nakon $union(f(x), f(z))$ dobijaju se klase $\{\{x, y, z\}, \{f(x), f(z)\}\}$, tj. $find$ je određen sa $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto x, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(x)\}$. Petlja je prazna.

Primer

Konačna relacija kongruentnog zatvorenja data je skupom klasa $\{\{x, y, z\}, \{f(x), f(z)\}\}$. Kako su $f(x)$ i $f(z)$ u istoj klasi, to znači da je jednakost $f(x) = f(z)$ logička posledica skupa jednakosti $x = y, y = z$, tj. važi $x = y, y = z \vDash f(x) = f(z)$.

Ispitivanje zadovoljivosti bazne EUF formule

Bazni fragment EUF teorije je odlučiv!

Neka je F proizvoljna bazna EUF formula (tj. formula bez promenljivih i kvantifikatora u kojoj su svi literali jednakosti i različitosti nad termovima koji sadrže neinterpretirane funkcijske simbole). Njenu zadovoljivost možemo ispitati na sledeći način:

- Formula F se najpre konvertuje u DNF, a zatim ispitujemo zadovoljivost svake od konjunkcija literala (čim jedna od njih bude zadovoljiva, prekidamo dalji postupak, jer je tada i cela formula zadovoljiva)
- Svaka od konjunkcija je oblika:

$$s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n \wedge s'_1 \neq t'_1 \wedge \dots \wedge s'_{n'} \neq t'_{n'}$$

- Određuje se kongruentno zatvorenje za skup jednakosti $E = \{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\}$ i skup termova T dobijen od $\{s_1, t_1, \dots, s_n, t_n, s'_1, t'_1, \dots, s'_{n'}, t'_{n'}\}$ i svih njihovih podtermova.
- Konjunkcija je zadovoljiva akko je $find(s'_i) \neq find(t'_i)$, za svako $1 \leq i \leq n'$.

NAPOMENA: Ispitivanje valjanosti se svodi na ispitivanje (ne)zadovoljivosti negacije.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF

Problem valjanosti univerzalno kvantifikovanih EUF formula

- Razmatrajmo valjanost univerzalno kvantifikovane EUF formule, tj. formula oblika $\forall x_1 \dots x_n. P(x_1, \dots, x_n)$, gde je P EUF formula bez kvantifikatora
- Negacijom i skolemizacijom se dobija bazna formula oblika $P'(c_1, \dots, c_n)$.
- Sada se ispitivanje valjanosti polazne univerzalno kvantifikovane EUF formule svodi na ispitivanje zadovoljivosti bazne EUF formule, kao što je malopre opisano

Napomena

Primetimo da se problem **zadovoljivosti** univerzalno kvantifikovane EUF formule ne može svesti na zadovoljivost bazne formule, jer se u tom slučaju ne mogu ukloniti univerzalni kvantifikatori.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer

Primer

Pokažimo da formula

$$\forall x. f^3(x) = x \wedge f^5(x) = x \Rightarrow f^2(x) = x$$

važi u svim normalnim modelima, pri čemu je $f^i(x)$ skraćeni zapis za $f(f(\dots f(x)))$, gde se f primenjuje i puta. Negiranjem polazne formule i skolemizacijom dobija se formula

$$f^3(c) = c \wedge f^5(c) = c \wedge f^2(c) \neq c.$$

Posmatrajmo izvršavanje Nelson-Oppen-ovog algoritma. Skup jednakosti $E = \{f^3(c) = c, f^5(c) = c\}$, a skup termova $T = \{c, f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$.

Primer

Primer

- $merge(f^3(c), c) - T_{f^3(c)} = \{f^4(c)\}$, $T_c = \{f(c)\}$. Nakon izvršetka $union(f^3(c), c)$ dobijaju se klase $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c)\}, \{f^2(c)\}, \{f^4(c)\}, \{f^5(c)\}\}$. $f^4(c)$ i $f(c)$ su kongruentni pa se poziva:

- $merge(f^4(c), f(c)) - T_{f^4(c)} = \{f^5(c)\}$, $T_{f(c)} = \{f^2(c)\}$. Nakon izvršetka $union(f^4(c), f(c))$ dobijaju se klase $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}, \{f^2(c)\}, \{f^5(c)\}\}$. $f^5(c)$ i $f^2(c)$ su kongruentni pa se poziva:

- $merge(f^5(c), f^2(c)) - T_{f^5(c)} = \{\}$, $T_{f^2(c)} = \{f^3(c)\}$. Nakon izvršetka $union(f^5(c), f^2(c))$ dobijaju se klase $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}, \{f^2(c), f^5(c)\}\}$. Petlja je prazna.

Primer

Primer

- $\text{merge}(f^5(c), c) - T_{f^5(c)} = \{f^3(c)\}, T_c = \{f(c), f^4(c)\}$.

Nakon union($f^5(c), c$) dobijaju se klase

$\{\{c, f^2(c), f^3(c), f^5(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}\}$.

Termovi $f^3(c)$ i $f(c)$ su kongruentni pa se poziva

- $\text{merge}(f^3(c), f(c)) - T_{f^3(c)} = \{f(c), f^3(c), f^4(c)\},$
 $T_{f(c)} = \{f^2(c), f^5(c)\}$.

Nakon union($f^3(c), f(c)$) dobijaju se klase

*$\{\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}\}$. Svi termovi su istoj klasi
 pa nema daljih rekurzivnih poziva.*

Svi termovi su istoj klasi pa nema daljih rekurzivnih poziva.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer

Primer

Dakle, pošto negirana formula sadrži različitost $f^2(c) \neq f(c)$, a na osnovu kongruentnog zatvorenja važi $f^2(c) = f(c)$, ona je nezadovoljiva, te polazna formula

$$\forall x. f^3(x) = x \wedge f^5(x) = x \Rightarrow f^2(x) = x$$

važi u svim normalnim modelima.

Neodlučivost EUF teorije

Neodlučivost EUF teorije

- Videli smo da su problemi valjanosti i zadovoljivosti odlučivi za bazni fragment EUF teorije
- Takođe, problem valjanosti je odlučiv za univerzalno kvantifikovane EUF formule
- Sa druge strane, problem zadovoljivosti univerzalno kvantifikovanih EUF formula je **neodlučiv**
- Takodje, problemi zadovoljivosti i valjanosti za EUF formule **u opštem obliku** su **neodlučivi**

Pregled

- 1 Normalni modeli. Aksiome jednakosti
- 2 Metateoreme
- 3 Rezolucija i paramodulacija
- 4 Dedukcija i jednakost
- 5 Jednakosno rezonovanje
- 6 Kongruentno zatvorenje
- 7 Prezapisivanje**

Zamenski dokazi još jednom

Zamenski dokazi – podsetnik

- Dokazi tvrdjenja $E \vdash s = t$ se (neformalno) obično sprovode tako što se se započne od terma s , a onda se na njega (odnosno njegove podtermove) primenjuju transformacije na osnovu datih jednakosti $s_i = t_i \in E$, vršeći pri tom pogodne instancijacije.
- Ukoliko se takvim transformacijama polazeći od s može dobiti term t , tada zaključujemo da je $s = t$ posledica jednakosti iz E
- Ovakve dokaze nazivali smo **zamenskim dokazima**
- Problem zamenskih dokaza je to što ih je teško automatski konstruisati, zbog toga što je teško kontrolisati primenu zamena u termovima i usmeravati je ka pravom cilju

Prezapisivanje

Od zamenskih dokaza do prezapisivanja

- U praksi, kada „na papiru” primenjujemo zamenske dokaze, obično date „zakone” iz E primenjujemo na usmeren način, u cilju uprošćavanja polaznog terma
- Na primer, term $x \cdot x^{-1}$ se zamenjuje sa 1 — zamena u suprotnom smeru je obično neintuitivna, jer ne vodi ka uprošćavanju terma
- Otuda zakon $x \cdot x^{-1} = 1$ posmatramo kao „usmerenu jednakost” $x \cdot x^{-1} \rightarrow 1$, tj. kao pravilo po kome se vrši uprošćavanje
- Sada se tvrdjenje $E \vdash s = t$ dokazuje tako što se s i t uprošćavaju koristeći usmerene jednakosti iz E , sa ciljem da se svedu na isti term
- Korišćenje transformacija termova na osnovu usmerenih jednakosti naziva se **prezapisivanje**. Usmerene jednakosti nazivamo **pravila prezapisivanja**.

Usmeravanje jednakosti

Ali kako da usmerimo jednakosti?

- Postavlja se pitanje na koji način jednakosti $s_i = t_i \in E$ usmeriti i pretvoriti u pravila prezapisivanja?
- Za svaku jednakost $s_i = t_i$ imamo dve mogućnosti: $s_i \rightarrow t_i$ ili $t_i \rightarrow s_i$
- Jednakosti treba usmeriti tako da u nekom smislu desna strana bude jednostavnija od leve, kako bi se prezapisivanjem dobijali jednostavniji termovi
- Međutim, pojam jednostavnijeg terma je suptilan. Na primer, $(x + y) \cdot (w + z)$ je kraći od $xw + xz + yw + yz$ ali se drugi smatra jednostavnijim jer omogućava dalja skraćivanja
- Otuda problem usmeravanja jednakosti nije ni malo trivijalan

Definicija

Pravilo prezapisivanja termova je usmerena jednakost oblika $l \rightarrow r$ gde su l i r termovi takvi da l nije promenljiva i r ne uvodi nove slobodne promenljive u odnosu na l (skup slobodnih promenljivih terma r je podskup skupa slobodnih promenljivih terma l).

Definicija

Ako je $l \rightarrow r$ pravilo prezapisivanja termova kažemo da se term t na osnovu ovog pravila prezapisuje u term t' ako postoji podterm terma t koji je instanca terma l , takav da se njegovom zamenom instancom terma r (pri istoj instancijaciji) dobija term t' .

Definicija

Sistem prezapisivanja R termova je skup pravila prezapisivanja termova. Kažemo da $t \rightarrow_R t'$ ako postoji neko pravilo $l \rightarrow r \in R$ kojim se t prezapisuje u t' . Relacija \rightarrow_R je relacija prezapisivanja termova.

Primer primene prezapisivanja

Primer

Prezapisivanjem terma $(a + a) + (b + b)$ na osnovu pravila $x + x \rightarrow 2x$ mogu se dobiti $2a + (b + b)$ i $(a + a) + 2b$. Term $2a + 2b$ se može dobiti nakon dva koraka.

Prezapisivanje i Birkhofov sistem

Teorijski osnov prezapisivanja

- Prezapisivanje ima svoje teoretsko opravdanje (zasnovano na Birkhofovom sistemu).
- Svaki lanac prezapisivanja se može konvertovati u formalni dokaz u Birkhofovom sistemu.
- Važi i obratno.

Teorema

Ako je \rightarrow_R relacija dobijena na osnovu sistema prezapisivanja R , a \leftrightarrow_R^ njeno simetrično, refleksivno i tranzitivno zatvorenje, tada za svaka dva terma s i t važi $s \leftrightarrow_R^* t$ ako i samo ako $R \vdash s = t$.*

Kanonski sistemi

Kanonski sistemi prezapisivanja

- U slučaju jednakosnog rezonovanja na osnovu datih jednakosti E , reći ćemo da su s i t ekvivalentni u odnosu na E , ako $E \vdash s = t$
- Da bi sistem za prezapisivanje bio efektivno upotrebljiv za automatizaciju dokazivanja ekvivalentnosti dva terma, poželjno je da ima dva veoma bitna svojstva:
 - svaki lanac prezapisivanja se mora završiti nakon konačno mnogo koraka, tj. mora se stići do terma na koji nije moguće dalje primeniti ni jedno pravilo — za ovakve termine kažemo da su u **normalnoj formi**
 - svaki term ima jedinstvenu normalnu formu
- Ova dva svojstva redom nazivamo **zaustavljanje** i **konfluentnost**
- Sistemi koji imaju ova dva svojstva se nazivaju **kanonski** ili **konvergentni**.
- Ovakvi sistemi se mogu koristiti kao procedure odlučivanja ekvivalentnosti dva terma s i t u odnosu na dati sistem jednakosti (proveri se da li se nakon „normalizacije” termina s i t dobija ista normalna forma).

Primer kanonskog sistema

Primer

$$\{m+0 = m, 0+n = n, m+S(n) = S(m+n), S(m)+n = S(m+n)\}$$

Utvrđivanje jednakosti dva terma na osnovu ovog sistema ne zahteva nikakvu kreativnost. Npr.

$$S(0) + S(S(0)) \rightarrow S(0 + S(S(0))) \rightarrow S(S(S(0)))$$

Takođe,

$$S(0) + S(S(0)) \rightarrow S(S(0) + S(0)) \rightarrow S(S(S(0) + 0)) \rightarrow \\ S(S(S(0 + 0))) \rightarrow S(S(S(0)))$$

Naravno, efikasnost zavisi od redosleda primene pravila, međutim, normalna forma do koje će se stići ne zavisi.

Primeri ne-kanonskih sistema — nezaustavljanje

Primer

Neka je dato pravilo $x + y \rightarrow y + x$. Term $1 + 2$ nema normalnu formu. Zaista, postoji izvođenje:

$$1 + 2 \rightarrow 2 + 1 \rightarrow 1 + 2 \rightarrow 2 + 1 \rightarrow \dots$$

*Ovaj sistem očigledno nema svojstvo **zaustavljanja**.*

Primeri ne-kanonskih sistema — nekonfluentnost

Primer

$$\{x + 0 \rightarrow x, s(x + y) \rightarrow x + s(y)\}$$

Term $s(x + 0)$ se primenom prvog pravila može prezapisati u $s(x)$, a primenom drugog pravila u $x + s(0)$. Nijedan od ova dva terma nije moguće dalje prezapisivati.

Dobijene normalne forme nisu jednake, pa ovaj sistem nema svojstvo konfluentnosti.

Primeri ne-kanonskih sistema — nekonfluentnost

Primer

$$\{x \cdot (y + z) \rightarrow x \cdot y + x \cdot z, (x + y) \cdot z \rightarrow x \cdot z + y \cdot z\}$$

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (c + d) &\rightarrow a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) \\ &\rightarrow (a \cdot c + a \cdot d) + b \cdot (c + d) \\ &\rightarrow (a \cdot c + a \cdot d) + (b \cdot c + b \cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (c + d) &\rightarrow (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\ &\rightarrow (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) \cdot d \\ &\rightarrow (a \cdot c + b \cdot c) + (a \cdot d + b \cdot d) \end{aligned}$$

Apstraktni sistemi za prezapisivanje

Apstraktni sistemi za prezapisivanje

- Najznačajni sistemi za prezapisivanje su sistemi za prezapisivanje termova.
- Ipak, ponekad se posmatraju opštiji sistemi, tzv. **apstraktni sistemi za prezapisivanje**.
- Relacija prezapisivanja R se posmatra na proizvoljnom skupu X (ne obavezno skupu termova) i obično se zapisuje infiksno $x \rightarrow y$. Ova relacija je apstraktno data i ne definiše se na osnovu skupa jednakosti termova.
- Oznaka \rightarrow^+ označava tranzitivno zatvorenje relacije \rightarrow , oznaka \rightarrow^* njeno reflektivno i tranzitivno zatvorenje, dok oznaka \leftrightarrow^* označava njeno simetrično, reflektivno i tranzitivno zatvorenje.

Zaustavljanje

Definicija

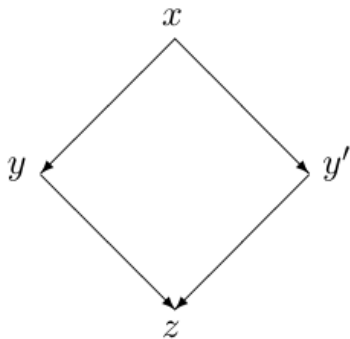
Relacija \rightarrow je zaustavljajuća (dobro zasnovana) ako ne postoji beskonačan lanac $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \dots$

Oblici konfluentnosti

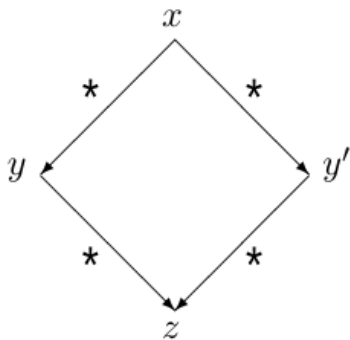
Definicija

- Relacija \rightarrow ima *svojstvo dijamanta* ako kada $x \rightarrow y$ i $x \rightarrow y'$ tada postoji z tako da $y \rightarrow z$ i $y' \rightarrow z$.
- x i y su *spojivi* što označavamo sa $x \downarrow y$ ako postoji z tako da $x \rightarrow^* z$ i $y \rightarrow^* z$.
- Relacija je *konfluentna* ako kada $x \rightarrow^* y$ i $x \rightarrow^* y'$ tada $y \downarrow y'$. Ekvivalentno, \rightarrow^* ima svojstvo dijamanta.
- Relacija je *slabo konfluentna* ako kada $x \rightarrow y$ i $x \rightarrow y'$ tada $y \downarrow y'$.
- Relacija ima *Čerč-Roserovo* svojstvo ako kada god $x \leftrightarrow^* y$, tada je $x \downarrow y$.

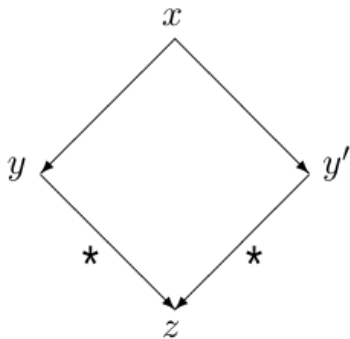
Svojstvo dijamanta



Konfluentnost



Slaba konfluentnost



Relacija \leftrightarrow^*

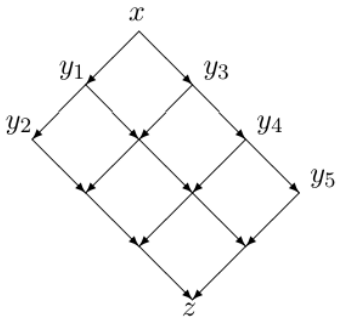


Oblici konfluentnosti

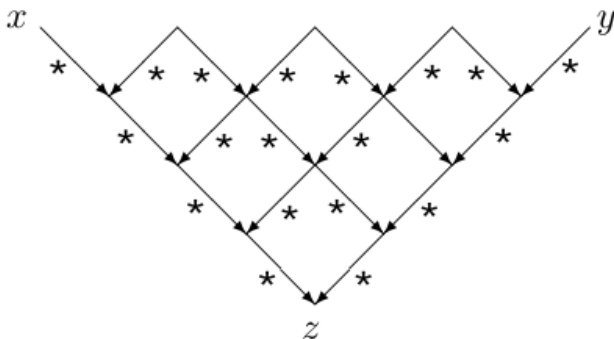
Stav

- *Ako je relacija konfluentna ona je slabo konfluentna.*
- *Ako relacija ima svojstvo dijamanta ona je konfluentna.*
- *Ako relacija ima svojstvo dijamanta ona je slabo konfluentna.*
- *Relacija ima Čerč Roserovo svojstvo akko je konfluentna.*

Svojstvo dijamanta povlači konfluentnost



Ekvivalentnost Čerč-Roserovog svojstva i konfluentnosti



Utvrđivanje konfluentnosti

Primedba

- U praksi je obično znatno lakše utvrditi slabu konfluentnost relacije od konfluentnosti
- Na žalost, slabo konfluentna relacija ne mora biti konfluentna.

Primer

Relacija $b \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b, c \rightarrow d$ je slabo konfluentna, ali nije konfluentna.

- Ipak, važi naredna teorema.

Teorema (Njuman)

Ako je relacija \rightarrow zaustavljajuća i slabo konfluentna, ona je i konfluentna.

- Ove teorema se u praksi koristi za lakše dokazivanje konfluentnosti:
 - Dokaže se slaba konfluentnost (što je lakše)
 - Dokaže se zaustavljanje (koje i onako moramo dokazati da bismo imali efektivno primenljiv sistem prezapisivanja)

Jedinstvenost normalne forme i konfluentnost

Definicija

Element $x \in X$ nazivamo *normalnom formom* u odnosu na relaciju \rightarrow ako ne postoji $y \in X$ takvo da je $x \rightarrow y$.

Ako je $x \rightarrow^* y$, gde je y normalna forma, tada kažemo da je y *normalna forma elementa* x .

Teorema

Ako je relacija \rightarrow konfluentna tada svaki element ima najviše jednu normalnu formu.

Dokaz

Pretpostavimo suprotno: da postoje dve različite normalne forme y_1 i y_2 elementa $x \in X$. Kako je $x \rightarrow^* y_1$ i $x \rightarrow^* y_2$, tada bi, zbog konfluentnosti, moralo da važi $y_1 \downarrow y_2$, što ne važi jer su ova dva elementa normalne forme. Kontradikcija.

Posledica

Ako je relacija \rightarrow konfluentna i zaustavljajuća, tada svaki element $x \in X$ ima jedinstvenu normalnu formu.

Spojivost i normalna forma

Teorema

Ako je relacija \rightarrow konfluentna, tada ako za neka dva elementa važi $x \downarrow y$, tada ova dva elementa ili oba nemaju normalne forme, ili su im (jedinственe) normalne forme jednake.

Dokaz

Iz $x \downarrow y$ sledi da postoji neki element z takav da $x \rightarrow^ z$ i $y \rightarrow^* z$. Ako, npr. x ima normalnu formu x' , tada važi $x \rightarrow^* x'$, pa zbog konfluentnosti važi $x' \downarrow z$. Medjutim, kako je x' normalna forma, to znači da je $z \rightarrow^* x'$. Otuda je i $y \rightarrow^* x'$, pa je x' normalna forma i za y .*

Normalne forme i relacija \leftrightarrow^*

Teorema

Neka je relacija \rightarrow konfluentna i zaustavljajuća na skupu X . Tada za svaka dva elementa x i y važi $x \leftrightarrow^ y$ akko x i y imaju jednake normalne forme.*

Dokaz

Iz konfluentnosti i zaustavljanja sledi da x i y imaju jedinstvene normalne forme. Iz konfluentnosti takođe sledi Čerč-Rozeroovo svojstvo, tj. $x \leftrightarrow^ y$ akko $x \downarrow y$. Iz prethodne teoreme sledi da ovo važi akko su normalne forme od x i y jednake.*

Ponovo o prezapisivanju termova

Teorema

Neka je dat skup jednakosti E i neka je orijentacijom ovih jednakosti dobijen sistem prezapisivanja termova R . Ako je relacija \rightarrow_R konfluentna i zaustavljajuća, tada za baznu jednakost $s = t$ važi $E \vDash s = t$ akko termovi s i t imaju jednake normalne forme u odnosu na relaciju \rightarrow_R .

Dokaz

Teorema je direktna posledica prethodne teoreme za apstraktne sisteme prezapisivanja.

Primedba

Iz ove teoreme sledi da je samo potrebno „pametno“ orijentisati jednakosti iz E tako da dobijeni sistem prezapisivanja bude konfluentan i zaustavljajući:

- u tom slučaju bismo samo prezapisali s i t do svojih normalnih formi (što možemo u konačnom broju koraka), a zatim ispitali da li su te dve normalne forme iste
- otuda bi problem $E \vDash s = t$ bio odlučiv

Ipak, ispostavlja se da nije lako utvrditi da li je moguće jednakosti iz E orijentisati na željeni način.

Ispitivanje zaustavljanja

Problem zaustavljanja

- Jedan od fundamentalnih problema je kako za dati sistem prezapisivanja termova utvrditi da li je zaustavljajući.
- Problem ispitivanja zaustavljanja je **neodlučiv!**
- Osnovni metod je pronalaženje dobro zasnovanog uređenja \succ takvog da iz $t \rightarrow_R t'$ sledi da $t \succ t'$.
- Još je bolje posmatrati dobro-zasnovano \succ uređenje takvo da za svako pravilo $l \rightarrow r$ važi $l \succ r$. Međutim, da bi se iz ovoga moglo garantovati zaustavljanje potrebno je da uređenje \succ ima i dodatna svojstva data u sledećoj definiciji.

Uređenje svođenja

Definicija

Relacija \succ je *uređenje prezapisivanja* ako je tranzitivno, irefleksivno i zatvoreno u odnosu na instancijacije i kongruencije, tj.

- *irefleksivno* – Ni za jedan term t ne važi $t \succ t$,
- *tranzitivno* – Ako je $s \succ t$ i $t \succ u$, tada $s \succ u$.
- *stabilno* – Ako je $s \succ t$ tada je $s[x \rightarrow t'] \succ t[x \rightarrow t']$.

- *monotono* – Ako je $s \succ t$, tada

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, s, u_{i+1}, \dots, u_n) \succ$$

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_n).$$

Dobro zasnovana uređenja prezapisivanja nazivaju se *uređenja svođenja*.

Uređenja svođenja

Lema (Manna, Ness)

Ako je \succ uređenje svođenja i za svako $l \rightarrow r \in R$ važi $l \succ r$, tada je \rightarrow_R zaustavljajuća.

Dokaz

Dovoljno je dokazati da iz $s \rightarrow_R t$ sledi $s \succ t$ — pošto je \succ dobro zasnovano tvrđenje sledi. Iz $s \rightarrow_R t$ sledi da postoji $l \rightarrow r \in R$ i instanca \bar{l} terma l koja je podterm terma s , takva da kada se on zameni odgovarajućom instancom \bar{r} terma r dobija se term t . Pošto je $l \succ r$, na osnovu svojstva stabilnosti važi da je $\bar{l} \succ \bar{r}$. Na osnovu uzastopne primene svojstva monotonosti dobija se i da je $s \succ t$.

Uređenja pojednostavljivanja

Definicija

Relacija \succ je uređenje pojednostavljivanja ako je irefleksivno, tranzitivno, stabilno, monotono i ima sledeće svojstvo podtermova:

- *svojstvo podtermova* – $f(\dots, t_i, \dots) \succ t_i$.

Primedba

Uređenje pojednostavljivanja je specijalni tip uređenja prezapisivanja.

Stav (Deršovic)

Svako uređenje pojednostavljivanja je dobro uređenje te je i uređenje svođenja.

Napomena

Iz prethodnog stava sledi da je u praksi dovoljno naša pravila prezapisivanja „utopiti” u neki poredak pojednostavljivanja. Jedan takav pristup prikazujemo u nastavku.

Definicija

Neka je data signatura \mathcal{L} , i neka je \succ (strogo i potpuno) uređenje skupa funkcijskih simbola Σ . Uređenje leksikografske staze (lexicographic path ordering (LPO)) \succ_{lpo} se definiše rekurzivno sledećim skupom pravila:

$$1 \quad \frac{v \in \text{Vars}(t) \quad t \neq v}{t \succ_{lpo} v}$$

$$2 \quad \frac{}{t \succeq_{lpo} t} \quad , \quad \frac{s \succ_{lpo} t}{s \succeq_{lpo} t}$$

$$3 \quad \frac{\exists i. s_i \succeq_{lpo} t}{f(s_1, \dots, s_m) \succ_{lpo} t}$$

$$4 \quad \frac{f \succ g, \quad \forall i. f(s_1, \dots, s_m) \succ_{lpo} t_i}{f(s_1, \dots, s_m) \succ_{lpo} g(t_1, \dots, t_n)}$$

$$5 \quad \frac{\forall i. f(s_1, \dots, s_m) \succ_{lpo} t_i, \quad (s_1, \dots, s_m) \succ_{lpo}^{lex} (t_1, \dots, t_n)}{f(s_1, \dots, s_m) \succ_{lpo} f(t_1, \dots, t_n)}$$

NAPOMENA: Oznaka $s \succeq_{lpo} t$ znači $s \succ_{lpo} t \vee s = t$, a \succ_{lpo}^{lex} označava leksikografsko poređenje torki.

Uređenje leksikografske staze

Stav

Svako uređenje leksikografske staze je uređenje pojednostavljivanja, pa samim tim i uređenje svođenja.

Uređenje leksikografske staze – primeri

Primer

Korišćenjem uređenja leksikografske staze pokažimo da je zaustavljajući sistem

$$\begin{aligned}x + 0 &\rightarrow x \\ -0 &\rightarrow 0 \\ -(x + y) &\rightarrow (-x) + (-y)\end{aligned}$$

Neka je uređenje simbola $- \succ + \succ 0$.

Primer

Tada je:

- $x + 0 \succ_{lpo} x$ na osnovu pravila 1. jer je $x \in \text{Vars}(x + 0)$
- $-0 \succ_{lpo} 0$ na osnovu 3. jer je na osnovu 2. $0 \succeq_{lpo} 0$
- $-(x + y) \succ_{lpo} (-x) + (-y)$ na osnovu pravila 4. jer je $- \succ +$ i pošto je, kao prvo, $-(x + y) \succeq_{lpo} -x$ i pošto je, kao drugo, $-(x + y) \succeq_{lpo} -y$. Prvo zaista važi na osnovu pravila 5. ukoliko je $x + y \succ_{lpo}^{lex} x$ a ovo je ispunjeno jer je $x + y \succ_{lpo} x$ na osnovu pravila 1. Na isti način se pokazuje i drugi uslov.

Uređenje leksikografske staze – primeri

Primer

Zaustavljanje pravila

$$(x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

se može pokazati uređenjem leksikografske staze. Zaista na osnovu pravila 5. treba pokazati da je $(x \cdot y, z) \succ_{lpo}^{lex} (x, y \cdot z)$ što je ispunjeno jer je $x \cdot y \succ_{lpo} x$ na osnovu pravila 1.

Dodatno, treba pokazati i da je term $(x \cdot y) \cdot z$ veći ili jednak od neposrednih podtermova terma $x \cdot (y \cdot z)$, a to su x i $y \cdot z$. Prvo je trivijalno na osnovu pravila 1, a drugo se dokazuje slično primenom pravila 5.

Zaustavljanje - zaključci

Zaključci

- LPO uređenje je jednoznačno određeno zadatim poretkom \succ funkcijskih simbola iz signature \mathcal{L}
- Za fiksiranu signaturu sa konačnim brojem funkcijskih simbola imamo konačno mnogo LPO uređenja
- Ipak, ne mogu se sva uređenja svođenja dobiti na ovakav način, niti je svaka zaustavljajuća relacija prezapisivanja podskup nekog uređenja svođenja
- Otuda, čak i ako pravila prezapisivanja nisu „usmerena” u skladu sa nekim od LPO uređenja datog jezika, to i dalje ne znači da sistem prezapisivanja termova nije zaustavljajući
- Ovo je u skladu sa ranije navedenom činjenicom o neodlučivosti pitanja zaustavljanja

Ispitivanje konfluentnosti

Pitanje konfluentnosti je takođe neodlučivo!

- Problem ispitivanja konfluentnosti datog sistema prezapisivanja termina je u opštem slučaju **neodlučiv**.
- Ipak, postoje specijalni slučajevi koji su odlučivi:

Stav

- *Pitanje konfluentnosti baznih sistema za prezapisivanje je odlučivo.*
- *Pitanje konfluentnosti zaustavljajućih sistema za prezapisivanje je odlučivo.*
- Naglasimo da zaustavljanje nije neophodno za konfluentnost:

Primer

Sistem $R = \{a \rightarrow b, b \rightarrow a, a \rightarrow c\}$ je konfluentan, ali nije zaustavljajući.

Kritični parovi

Definicija (Kritični par)

*Neka su $l_1 \rightarrow r_1$ i $l_2 \rightarrow r_2$ dva pravila koja nemaju zajedničkih promenljivih (ovo se može uvek postići preimenovanjem). Neka je l'_1 podterm terma l_1 koji nije promenljiva i neka je θ najopštiji unifikator termova l'_1 i l_2 . Tada za ova dva pravila prezapisivanja definišemo **kritični par** $\langle r_1\theta, (l_1[l'_1 \rightarrow r_2])\theta \rangle$.*

Primer

Neka je $l_1 \rightarrow r_1 \equiv s(x + y) \rightarrow x + s(y)$, a $l_2 \rightarrow r_2 \equiv x + 0 \rightarrow x$. Podterm $l'_1 \equiv x + y$ se može unifikovati sa $x + 0$ unifikatorom $\theta = \{y \mapsto 0\}$. Otuda imamo kritični par $\langle x + s(0), s(x) \rangle$.

Knut-Bendiksova teorema

Teorema

Sistem za prezapisivanje je lokalno konfluentan ako i samo ako su mu svi kritični parovi spojivi tj. ako važi $u_1 \downarrow u_2$, za svaki kritični par $\langle u_1, u_2 \rangle$

Napomena

Iz ove teoreme sledi da se ispitivanje lokalne konfluentnosti može svesti na ispitivanje spojivosti kritičnih parova (kojih ima konačno mnogo za dati (konačni) skup pravila prezapisivanja).

Provera kritičnih parova i ispitivanje konfluentnosti

Ideja postupka odlučivanja za zaustavljajuće sisteme prezapisivanja

- Da bi se otkrili svi kritični parovi datog sistema za prezapisivanje, svako pravilo se kombinuje sa svakim drugim (uključujući i svoju preimenovanu verziju).
- Pošto u slučaju konačnog sistema za prezapisivanje termova kritičnih parova ima konačno mnogo, da bismo utvrdili da li je sistem lokalno konflentan, dovoljno je ispitati spojivost konačno mnogo parova termova.
- U slučaju zaustavljajućeg sistema, spojivost kritičnih parova se efektivno može ispitati (dovoljno je termine prezapisati do (nekih) svojih normalnih formi i utvrditi da li su one iste)
- Takodje, usled zaustavljanja, po Njumanovoj lemi važi da je sistem lokalno konflentan akko je konflentan.
- Ovo nam daje proceduru odlučivanja za pitanje konfluentnosti konačnih, zaustavljajućih sistema za prezapisivanje termova.

Knut-Bendiksova procedura upotpunjavanja

Upotpunjavanje do konfluentnosti

- Iako se ispitivanjem kritičnih parova ponekad ustanovi da određeni sistem za prezapisivanje termova R nije konfluentan, u nekim slučajevima se, dodavanjem određenih pravila, sistem može učiniti konfluentnim.
- Neka je $\langle u_1, u_2 \rangle$ kritični par za koji postoje različite normalne forme \bar{u}_1 i \bar{u}_2 termova u_1 i u_2 .
- Jednakost $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ je posledica sistema R jer je $\bar{u}_1 \xleftrightarrow{*}_R \bar{u}_2$ i zbog toga dodavanje pravila $\bar{u}_1 \rightarrow \bar{u}_2$ ili $\bar{u}_2 \rightarrow \bar{u}_1$ ne menja odgovarajuću jednakosnu teoriju.
- U ovom proširenom sistemu, par $\langle u_1, u_2 \rangle$ postaje spojiv.
- Da bi sistem ostao zaustavljajući, potrebno je da je $\bar{u}_1 \succ \bar{u}_2$ ili $\bar{u}_2 \succ \bar{u}_1$ u odgovarajućem uređenju svođenja \succ .

Knut-Bendiksova procedura upotpunjavanja

Algoritam

Ulaz: skup jednakosti E i relacija svođenja $>$

Izlaz: konfluentan skup pravila prezapisivanja R ili *fail*

```
if (  $\exists (s = t) \in E. s \neq t \wedge s \not> t \wedge t \not> s$  )
  return fail;
```

```
 $R_0 = \{l \rightarrow r \mid (l = r) \in E \cup E^{-1} \wedge l > r\}$ 
```

```
do
```

```
   $R_{i+1} = R_i$ 
```

```
  forall (  $\langle u_1, u_2 \rangle \in CP(R_i)$  )
```

```
     $\bar{u}_1 = u_1 \downarrow; \bar{u}_2 = u_2 \downarrow;$ 
```

```
    if (  $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1 \not> \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_2 \not> \bar{u}_1$  )
```

```
      return fail;
```

```
    if (  $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$  )
```

```
       $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\bar{u}_1 \rightarrow \bar{u}_2\}$ 
```

```
    else if (  $\bar{u}_2 > \bar{u}_1$  )
```

```
       $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\bar{u}_2 \rightarrow \bar{u}_1\}$ 
```

```
  i := i+1;
```

```
while (  $R_i \neq R_{i-1}$  );
```

```
return  $R_i$ ;
```

Konfluentnost – zaključci

Zaključci o Knut-Bendiksovoj proceduri i konfluentnosti

- Knut-Bendiksova procedura može da nam kao rezultat vrati dopunjeni konfluentan sistem prezapisivanja ekvivalentan sa polaznim (u smislu dobijene jednakosne teorije)
- Alternativno, Knut-Bendiksova procedura može reći da takav sistem ne postoji (pod pretpostavkom fiksiranog uređenja svođenja)
- Najzad, Knut-Bendiksova procedura može da se nikada ne zaustavi
- Otuda, mi ne možemo Knut-Bendiksovu proceduru koristiti kao proceduru odlučivanja za pitanje „da li se dati zaustavljajući sistem prezapisivanja može dopuniti do konfluentnog?“
- I ovo pitanje je u opštem slučaju **neodlučivo**