ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ У НИЗОВИМА НЕЗАВИСНИХ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

Основни појмови о екстремним вредностима

Теорија екстремних вредности бави се проучавањем екстремних вредности (максимума и минимума) у фамилијама случајних величина. При томе, основна питања која се проучавају у вези са екстремним вредностима јесу њихове тачне и асимптотске расподеле. Класичним се сматра део теорије који пручава екстремне вредности у низовима независних случајних величина, а основне резултате тог дела теорије приказаћемо у овој глави. У овом одељку уводимо основне појмове и ознаке.

Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са истом функцијом расподеле F. Означимо

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}. \tag{1}$$

Из независности лако следи да је функција расподеле случајне величине M_n дата са

$$P\{M_n \leqslant x\} = (F(x))^n. \tag{2}$$

Интересантније је асимптотско понашање случајне величине M_n када $n \to \infty$, а прво питање у вези са тим је следеће. Да ли постоје константе $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, за $n \in \mathbb{N}$, такве да важи

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} = G(x), \tag{3}$$

за свако $x \in C(G)$, где је G нека недегенерисана функција расподеле, а $C(G)$ скуп њених тачака непрекидности? Ако је одговор на ово питање потврдан, онда се константе $a_n > 0$ и b_n зову нормирајуће константе, а функција расподеле G из једнакости (5.1.3) одређује граничну расподелу линеарно нормираног максимума M_n. Ако означимо $u_n = a_n x + b_n$, онда важи једнакост

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} = \{F(a_n x + b_n)\}^n = (F(u_n))^n. \tag{4}$$

Дефиниција 1. Ако за функцију расподеле F (заједничку функцију расподеле чланова низа (X_n)) важи (3), онда кажемо да F припада *области привлачења за максимуме* функције расподеле G. Скуп свих таквих функција расподеле F, тј. област привлачења функције расподеле G, означавамо са $D(G)$.

У даљем излагању формулисаћемо резултате који дају одговоре на следећа питања:

(а) Које функције расподеле G се могу појавити у једнакости (3) као граничне расподеле максимума од n случајних величина са истом расподелом, када $n \to \infty$?

(б) Како се одређују нормирајуће константе a_n и b_n?

(в) Како се одређују потребни и довољни услови да нека функција расподеле F припада непразној области привлачења $D(G)$?

Детаљнији приказ и докази већине тврђења која ће бити формулисана у овој глави и која се односе на екстремне вредности у низовима независних случајних величина са истом расподелом могу се наћи у књизи Младеновић (2002). Видети такође Leadbetter, Lindgren, Rootzén (1983), Resnick (1987), de Haan, Ferreira (2006). Теорија екстремних вредности проучава екстремуме и у низовима зависних случајних величина као и у процесима са непрекидним параметром. Посебно је значајан део теорије који се односи на стационарне низове и процесе.

Расподеле екстремних вредности

У теорији која ће бити изложена важну улогу имају такозване *расподеле екстремних вредности.* То су три параметарске фамилије, које су познате као *Гумбелова*, *Фрешеова* и *Вејбулова расподела.* Стандардни представници ових фамилија у α-**параметризацији** су следеће функције расподела:

- Гумбелова расподела:

$$G_0(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1}$$

- Фрешеова расподела са параметром $\alpha > 0$:

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \ x < 0, \\ \exp(-x^{-\alpha})), & \text{ако је } \ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Вејбулова расподела са параметром $\alpha > 0$:

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \text{ако је } \ x < 0, \\ 1, & \text{ако је } \ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Напомена. Параметар α код Фрешеове и Вејбулове функције расподеле зове се *параметар облика.*

Параметри положаја и размере. Ако случајна величина X има Гумбелову функцију расподеле $G_0(x)$, онда случајна величина $\sigma X + \mu$, где је $\sigma > 0$, има функцију расподеле дату са

$$G_{0,\mu,\sigma}(x) = G_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}. \tag{4}$$

Расподела $G_{0,\mu,\sigma}(x)$ зове се Гумбелова расподела са параметром положаја μ и параметром размере $\sigma > 0$. На сличан начин дефинишу се Фрешеова и Вејбулова расподела са параметрима положаја и размере μ и $\sigma > 0$:

$$G_{i,\alpha,\mu,\sigma}(x) = G_{i,\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad i \in \{1, 2\}. \tag{5}$$

γ**-параметризација**. Уведимо смену $\gamma = 1/\alpha$ за Фрешеове расподеле и $\gamma = -1/\alpha$ за Вејбулове расподеле. Погодним избором параметра положаја и размере, Гумбелова, Фрешеова и Вејбулова функција расподеле могу се записати у облику параметарске фамилије која зависи од једног параметра γ на следећи начин:

$$G_0(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty; \tag{6}$$

$$G_\gamma(x) = \exp\bigl\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\bigr\}, \quad 1+\gamma x > 0, \ \ \gamma \neq 0. \tag{7}$$

У вези са γ-параметризацијом Гумбелове, Фрешеове и Вејбулове функције расподеле приметимо следеће:

(а) Формулом (6) дата је стандардна Гумбелова расподела и за сваки реалан број x важи једнакост

$$\lim_{\gamma \to 0} G_\gamma(x) = G_0(x), \tag{8}$$

јер $(1+\gamma x)^{-1/\gamma} \to e^{-x}$ при услову $\gamma \to 0$.

(б) За $\gamma > 0$ функција $G_\gamma(x)$ дата са (7) представља Фрешеову функцију расподеле, при чему је леви крај носача расподеле тачка $-1/\gamma < 0$. За $\gamma = 1/\alpha > 0$ важи $G_\gamma(x) = G_{1,\alpha,-\alpha,\alpha}(x)$.

(в) За $\gamma < 0$ функција $G_\gamma(x)$ дата са (7) представља Вејбулову функцију расподеле, а десни крај носача расподеле је тачка $-1/\gamma > 0$. За $\gamma = -1/\alpha < 0$ важи $G_\gamma(x) = G_{2,\alpha,\alpha,\alpha}(x)$.

Густине Гумбелове, Фрешеове и Вејбулове расподеле у α-параметризацији дате су следећим формулама:

- Гумбелова расподела:

$$g_0(x) = e^{-x} \cdot \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{9}$$

- Фрешеова расподела са параметром облика $\alpha > 0$:

$$g_{1,\alpha}(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)} G_{1,\alpha}(x), \quad x \geqslant 0. \tag{10}$$

- Вејбулова расподела са параметром облика $\alpha > 0$:

$$g_{2,\alpha}(x) = \alpha(-x)^{\alpha-1} G_{2,\alpha}(x), \quad x \leqslant 0. \tag{11}$$

Густина Фрешеове и Вејбулове расподеле у γ-параметризацији дате су следећим формулама

$$g_\gamma(x) = (1+\gamma x)^{-(1+1/\gamma)} G_\gamma(x), \quad 1+\gamma x > 0, \quad \gamma \neq 0. \tag{12}$$

При томе, лако се проверава да се густина Гумбелове расподеле, која је дата са (9), може добити као гранична вредност густина Фрешеове и Вејбулове расподеле када параметар γ тежи нули, тј. када за сваки реалан број x важи $g_\gamma(x) \to g_0(x)$ при $\gamma \to 0$.

Моменти и друге карактеристике Гумбелове расподеле. Нека случајна величина X има Гумбелову расподелу са функцијом расподеле $G_{0,\mu,\sigma}$ и густином

$$g_{0,\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma} \exp\left\{-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right\}. \tag{13}$$

Тада је густина расподеле случајне величине $X_0 = (X-\mu)/\sigma$ дата са

$$g_0(x) = g_{0,\mu,\sigma}(x) = e^{-x} \cdot \exp\{-e^{-x}\}. \tag{14}$$

Случајна величина $Z = e^{-(X-\mu)/\sigma} = e^{-X_0}$ има експоненцијалну расподелу са густином

$$f_Z(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ако је } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{ако је } x < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Приметимо да за $t < 1$ важи

$$E\left\{e^{t(X-\mu)/\sigma}\right\} = Ee^{tX_0} = EZ^{-t} = \int_0^\infty x^{-t} e^{-x}\, dx = \Gamma(1-t). \tag{16}$$

На основу тога добијамо да је генераторна функција момената случајне величине $X = \mu + \sigma X_0$ дата са

$$Ee^{tX} = e^{t\mu}\Gamma(1-\sigma t), \quad \sigma t < 1, \tag{17}$$

а генераторна функција кумуланата (семиинваријаната) исте случајне величине је

$$\widetilde{G}(t) = \mu t - \ln \Gamma(1-\sigma t). \tag{18}$$

Математичко очекивање и дисперзија случајне величине X, која има Гумбелову расподелу $G_{0,\mu,\sigma}$ дати су са

$$E(X) = \mu + \gamma_0 \sigma \approx \mu + 0.57722\sigma, \tag{19}$$

$$D(X) = \frac{\pi^2\sigma^2}{6} \approx 1.64493\sigma^2, \tag{20}$$

где је $\gamma_0 = 0.57792\ldots$ Ојлерова константа. Из (19) и (20) лако добијамо да случајна величина X има нулто математичко очекивање и јединичну дисперзију, ако је

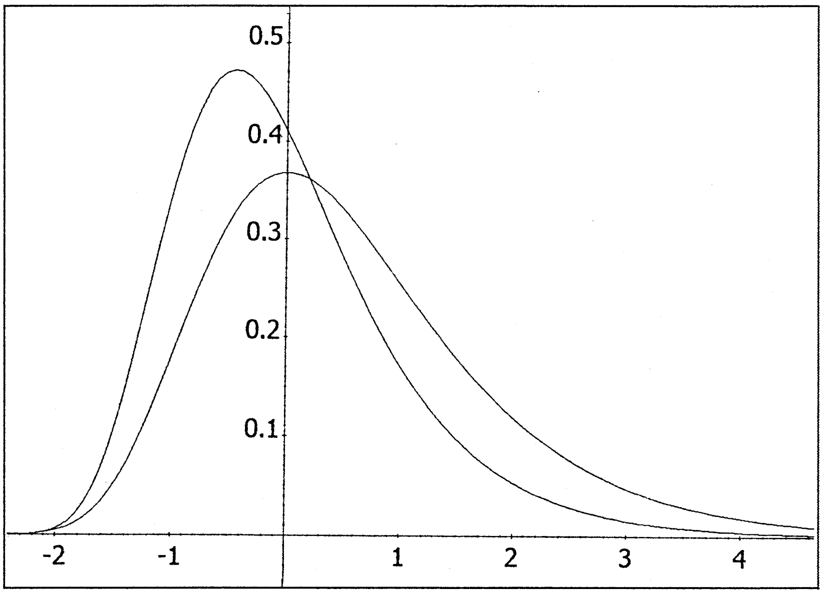
$$\sigma = \frac{\sqrt{6}}{\pi}, \quad \mu = -\gamma_0\sigma = -\frac{\gamma_0\sqrt{6}}{\pi}, \tag{21}$$

односно ако је $\sigma \approx 0.77970$ и $\mu \approx -0.45006$. Расподела вероватноћа случајне величине X је унимодална са модом μ. Тачке превоја густине расподеле $g_{0,\mu,\sigma}(x)$ су

$$x_1 = \mu - \sigma \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \mu + \sigma \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{22}$$

Табела 1.

p	x'_p	x''_p
0.0005	−2.0325	−2.0283
0.0001	−1.9569	−2.2203
0.005	−1.7501	−1.6674
0.01	−1.6408	−1.5272
0.05	−1.3055	−1.0972
0.1	−1.1004	0.8340
0.9	1.3046	2.2504
0.95	1.8658	2.9702
0.99	3.1367	4.6001
0.9975	4.2205	5.9902
0.999	4.9355	6.9073



Слика 1. Графици густина Гумбелове расподеле
(а) $\mu = -0.45006$, $\sigma = 0.77970$, (б) $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Квантил реда p, где је $0 < p < 1$, тј. број x_p за који важи $G_{0,\mu,\sigma}(x_p) = p$, одређује се из једнакости

$$x_p = \mu - \sigma \ln(-\ln p). \tag{23}$$

У табели 1 дати су квантили Гумбелове расподеле и то: x'_p је квантил Гумбелове расподеле са нултим очекивањем и јединичном дисперзијом ($\sigma = \sqrt{6}/\pi$, $\mu = -\sqrt{6}\gamma_0/\pi$), а x''_p је квантил Гумбелове расподеле $G_{0,0,1}$ са параметрима $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Моменти Фрешеове и Вејбулове расподеле. Нека су X_0, $X_{1,\alpha}$ и $X_{2,\alpha}$ случајне величине чије су функције расподела G_0, $G_{1,\alpha}$ и $G_{2,\alpha}$ редом. Са X_γ, где је $\gamma \neq 0$, означаваћемо случајну величину која има Фрешеову или Вејбулову функцију расподеле G_γ (у γ-параметризацији).

За случајну величину $X_{1,\alpha}$ са Фрешеовом расподелом (после увођења смене $t = x^{-\alpha}$) добијамо да за $k > \alpha$ важи

$$E(X_{1,\alpha}^k) = \int_0^{+\infty} x^k g_{1,\alpha}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} t^{-k/\alpha} e^{-t}\,dt = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right). \tag{24}$$

Користећи формулу (24) добијамо да је

$$E(X_{1,\alpha}) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 1; \tag{25}$$

$$D(X_{1,\alpha}) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 2. \tag{26}$$

Приметимо такође да је

$$E(X_{1,\alpha}) = +\infty, \quad \text{ako je } 0 < \alpha \leqslant 1; \tag{27}$$

$$D(X_{1,\alpha}) = +\infty, \quad \text{ako je } 0 < \alpha \leqslant 2. \tag{28}$$

За случајну величину $X_{2,\alpha}$ са Вејбуловом расподелом добијамо:

$$E(X_{2,\alpha}^k) = \int_{-\infty}^0 x^k g_{2,\alpha}(x). \tag{29}$$

Ако уведемо смену $t = (-x)^\alpha$, онда је $x = -t^{1/\alpha}$, $dx = -\frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha - 1}\,dt$, па из једнакости (29) за $\alpha > 0$ и $1 + k/\alpha > 0$ добијамо

$$E(X_{2,\alpha}^k) = (-1)^k \int_0^\infty t^{k/\alpha} e^{-t}\,dt = (-1)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right). \tag{30}$$

Сада из једнакости (30) добијамо да је

$$D(X_{2,\alpha}) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0. \tag{31}$$

Код Фрешеове и Вејбулове расподеле у γ-параметризацији добијамо следеће вредности за математичко очекивање и дисперзију:

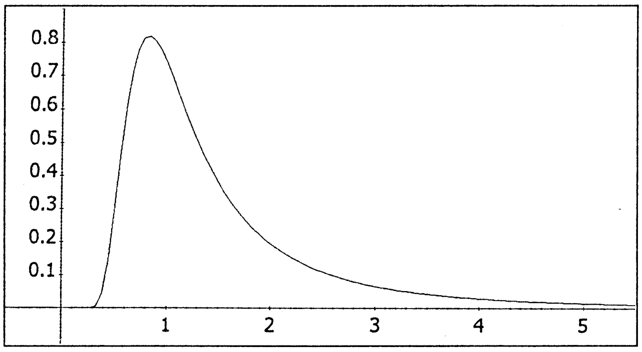
$$E(X_\gamma) = \frac{\Gamma(1-\gamma)-1}{\gamma}, \quad \gamma < 1; \tag{32}$$

$$D(X_\gamma) = \frac{\Gamma(1-2\gamma)-\Gamma^2(1-\gamma)}{\gamma^2}, \quad \gamma < 1/2. \tag{33}$$

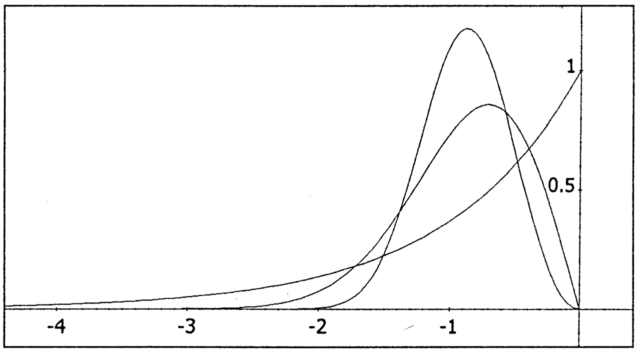
Математичко очекивање и дисперзија Гумбелове расподеле могу се добити из једнакости (32) и (33) на следећи начин:

$$E(X_0) = \lim_{\gamma\to 0} E(X_\gamma) = -\int_0^{+\infty} \ln x\, e^{-x}\, dx = 0.577216\ldots \tag{34}$$

$$D(X_0) = \lim_{\gamma\to 0} D(X_\gamma) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{35}$$



Слика 2. График густине Фрешеове расподеле: $\alpha = 2$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$.



Слика 3. Графици густина Вејбулове расподеле: $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Асимптотско понашање вероватноће $P\{M_n \leqslant u_n\}$

При проучавању расподеле максимума $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, важну улогу играју вероватноће догађаја облика $\{M_n \leqslant u_n\}$, при чему је (u_n) низ реалних бројева који тежи ка x_F, где је

$$x_F = \sup\{t : F(t) < 1\}.$$

Гранична расподела максимума M_n одређена је асимптотским понашањем репа $1-F(x)$ при $x \to x_F$. Наводимо два једноставна помоћна тврђења, која су важна при пручавању асимптотског понашања максимума случајних величина.

Теорема 1. *Нека је (X_n) низ независних случајних величина са заједничком функцијом расподеле F, $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, (u_n) низ реалних бројева и $0 \leqslant \tau \leqslant +\infty$. Тада једнакост*

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau, \tag{1}$$

важи ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant u_n\} = e^{-\tau}. \tag{2}$$

Доказ: (а) Размотримо прво случај $0 \leqslant \tau < +\infty$. Претпоставимо да при $n \to \infty$ важи $n(1 - F(u_n)) \to \tau$. Тада је

$$\begin{aligned} P\{M_n \leqslant u_n\} &= (F(u_n))^n = \{1 - (1 - F(u_n))\}^n \\ &= \left\{1 - \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n \to e^{-\tau}, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Обрнуто, претпоставимо да $P\{M_n \leqslant u_n\} \to e^{-\tau}$ при $n \to \infty$. Тада, $1 - F(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Ако $1 - F(u_n) \not\to 0$, онда постоји позитиван број δ и подниз $(n(k))$ такав да за све $n(k)$ важи неједнакост $1 - F(u_{n(k)}) \geqslant \delta$. Као последицу добијамо да при $k \to \infty$ важи

$$P\{M_{n(k)} \leqslant u_{n(k)}\} = \{1 - (1 - F(u_{n(k)})\}^{n(k)} \to 0, \tag{3}$$

што је у контрадикцији са (2). Дакле, заиста $1 - F(u_n) \to 0$. На основу тога из (2) добијамо да је

$$n \ln\{1 - (1 - F(u_n))\} \to -\tau, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Користећи (4) и чињеницу да је $\ln(1 - x) \sim -x$ при $x \to 0$, добијамо $n(1 - F(u_n))(1 + o(1)) \to \tau$, одакле следи (1).

(б) Нека је $\tau = +\infty$ и нека важи (2). Претпоставимо да не важи (1). Тада постоји низ $n(k)$ природних бројева, такав да при $k \to \infty$ важи $n(k) \to \infty$ и

$$n(k)(1 - F(u_{n(k)})) \to \tau_0 < +\infty. \tag{5}$$

На основу доказаног под (а) важи $P\{M_{n(k)} \leqslant u_{n(k)}\} \to e^{-\tau_0} \neq 0$, што је у овом случају у контрадикцији са (2). Тиме је доказано да за $\tau = +\infty$ из (2) следи (1). Аналогно из (1) следи (2). ■

Теорема 2. *Нека је* (X_n) *низ независних случајних величина са заједничком функцијом расподеле* F, $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ *и претпоставимо да је* $0 < \tau < +\infty$. *Тада низ* (u_n) *за који важи* (1) *постоји ако и само ако је*

$$\lim_{x \to x_F} \frac{F(x) - F(x-0)}{1 - F(x-0)} = 0. \tag{6}$$

Пример 1. Нека X дискретна случајна величина чији је скуп вредности $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $F(x) = P\{X \leqslant x\}$ функција расподеле случајне величине X. Ако означимо $p_n = P\{X = n\}$ за $n \in \mathbb{N}_0$, онда се услов (6) који је потребан и довољан за тврђење теореме 2, своди на једнакост

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{1 - F(n-1)} = 0. \tag{7}$$

Код Пуасонове расподеле $\mathcal{P}(\lambda)$ је $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ за $n \in \mathbb{N}_0$, па следи да је

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots}{p_n} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}\lambda^{k-n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(n+1)(n+2)\ldots(n+i)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i = \frac{\lambda/n}{1 - (\lambda/n)} \to 0 \ \text{ кад } \ n \to \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) добијамо да

$$\frac{p_n}{1 - F(n-1)} = \frac{p_n}{p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots} \to 1, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Имајући у виду теорему 2 (тј. услове (6) и (7)) закључујемо да у случају када је је F функција Пуасонове расподеле не постоји гранична расподела максимума M_n. Слично се доказује да ако је X случајна величина која има геометријску расподелу (општије, негативну биномну расподелу), онда такође не постоји гранична расподела линеарно нормираног максимума M_n. △

Максимум стабилне расподеле и теорема о екстремалним типовима

М-стабилност и области привлачења. У овом одељку дефинишемо важне појмове, максимум стабилност и области привлачења.

Дефиниција 1. Функција расподеле G је *максимум стабилна* (кратко М-*стабилна*), ако је недегенерисана и за сваки природан број $n \geqslant 2$ постоје константе $a_n > 0$ и b_n, такве да за сваки реалан број x важи једнакост

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x). \tag{1}$$

Дефиниција 2. Функција расподеле F припада *области привлачења* недегенерисане функције расподеле G, ако постоје низови реалних бројева $a_n > 0$ и b_n, $n \in \mathbb{N}$, такви да једнакост

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \tag{2}$$

важи за сваку тачку непрекидности x функције G. Област привлачења функције расподеле G означавамо са $D(G)$.

Дефиниција 3. Функције расподела G_1 и G_2 су *истог типа*, ако постоје константе $a > 0$ и b, такве да за сваки реалан број x важи једнакост $G_2(x) = G_1(ax + b)$.

Недегенерисана функција расподеле G је М-стабилна, ако и само ако је за сваки природан број n функција G^n истог типа као функција G. Следећи пример показује да су Гумбелова, Фрешеова и Вејбулова расподела М-стабилне.

Пример 1. (а) За $a_n = 1$, $b_n = \ln n$ и сваки $x \in \mathbb{R}$ добијамо

$$\begin{aligned}\left\{\exp\left(-e^{-(a_n x + b_n)}\right)\right\}^n &= \left\{\exp\left(-e^{-(x+\ln n)}\right)\right\}^n \\ &= \exp\left(-n e^{-\ln n} e^{-x}\right) = \exp(-e^{-x}),\end{aligned}$$

одакле следи да је Гумбелова расподела М-стабилна.

(б) За $x > 0$ и $a_n = n^{1/\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $b_n = 0$, добијамо да је

$$\begin{aligned}\left\{\exp\left(-(n^{1/\alpha} x)^{-\alpha}\right)\right\}^n &= \exp\left(-n \cdot n^{-1} \cdot x^{-\alpha}\right) \\ &= \exp(-x^{-\alpha}),\end{aligned}$$

односно, Фрешеова функција расподеле $G_{1,\alpha}$, $\alpha > 0$, је M-стабилна.

(в) За $x < 0$ и $a_n = n^{-1/\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $b_n = 0$, добијамо да је

$$\begin{aligned}\left\{\exp\left(-(-n^{-1/\alpha}x)^\alpha\right)\right\}^n &= \exp\left(-n \cdot n^{-1} \cdot (-x)^\alpha\right)\\ &= \exp(-(-x)^\alpha),\end{aligned}$$

односно, Вејбулова функција расподеле $G_{2,\alpha}$, $\alpha > 0$, је M-стабилна.

(г) Нека је G нека од функција G_0, $G_{1,\alpha}$ и $G_{2,\alpha}$. Тада је за $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ функција $G(ax + b)$ максимум стабилна. $\triangle$

Формулисаћемо још једну теорему која говори о значају максимум стабилних расподела. За доказ ове теореме видети Теорему 2.4.3 у књизи Младеновић (2002).

Теорема 1. *Функција расподеле G је M-стабилна ако и само ако важи $D(G) \neq \varnothing$ и у том случају је $D \in D(G)$.*

Теорема о екстремалним типовима даје одговор на питање које се расподеле могу појавити као граничне расподеле линеарно нормираног максимума у низу независних случајних величина са истом расподелом.

Теорема 2. [Gnedenko (1943), de Han (1976)] *Нека је (X_n) низ независних случајних величина са истом функцијом расподеле F и нека је $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Ако постоје низови константи $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$ за све $n \in \mathbb{N}$, такве да је*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \tag{3}$$

за свако $x \in C(G)$, где је $C(G)$ скуп тачака непрекидности неке недегенерисане функције расподеле G, онда је функција расподеле G истог типа као нека од функција расподела екстремних вредности:

$$G_0(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{4}$$

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x < 0,\\ \exp(-x^{-\alpha})), & \text{ако је } x \geqslant 0,\end{cases} \qquad (\alpha > 0), \tag{5}$$

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & \text{ако је } x < 0,\\ 1, & \text{ако је } x \geqslant 0,\end{cases} \qquad (\alpha > 0). \tag{6}$$